19/01/16

Άσκ. ① Έστω $c(s)$ καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο, καμπυλότητα $K(s)>0$ $\forall s$ και μοναδιαίο εφ/νο $\vec{t}(s)$. Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια ~~...~~ $X(s,u) = c(s) + u\vec{t}(s)$, $s\in I$, $u>0$.
(i) Είναι κανονική; (ii) είναι αναπτυκτή; (iii) $\exists$ καμπύλη $c(s)$ έτσι ώστε η X να είναι τμήμα σφαίρας;

Λύση: (i) $X_s = \dot{c}(s) + u\dot{\vec{t}} = \vec{t} + uK\vec{n}$, $X_u = \vec{t}$ $\Rightarrow X_s \times X_u = (\vec{t}+uK\vec{n})\times\vec{t} =$

$= uK\vec{n}\times\vec{t} = -uK\vec{t}\times\vec{n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{X_s \times X_u = -uK\vec{b}} \neq 0,\ \forall s\in I,\ u>0,$$

Άρα X κανονική!

(ii) Η X είναι ευθειογενής αφού οι παραμετρικές καμπύλες $s=$σταθ είναι ευθείες (ημι-) (διότι $u>0$) $/\!/ \vec{t}(s)$.

$$N = \frac{X_s\times X_u}{\|X_s\times X_u\|} = \frac{-uK(s)\vec{b}(s)}{uK(s)} = -\vec{b}(s)$$ ανεξάρτητο του u άρα $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ αναπτυκτή.

(iii) Όχι γιατί η X είναι ευθειογενής $\Rightarrow K=0$ $\Rightarrow$

Όμως $K_{σφαίρας} = \dfrac{1}{R^2} > 0$

$\Rightarrow \boxed{K \neq K_{σφ}}$

β' τρόπος: $E = \|X_s\|^2 = 1 + u^2K^2$
$F = \langle X_s, X_u\rangle = 1$
$G = \|X_u\|^2 = 1$

$X_{ss} = \dot{\vec{t}} + u\dot{K}\vec{n} + uK\dot{\vec{n}} =$
$= K\vec{n} + u\dot{K}\vec{n} + uK(-K\vec{t} + \tau\vec{b}) =$
$= -u^2K^2\vec{t} + (K + u\dot{K})\vec{n} + uK\tau\vec{b}$

$e = \langle X_{ss}, N \rangle = -v\kappa\tau$ | $X_{sv} = \kappa \vec{n} \Rightarrow f = \langle X_{sv}, N \rangle = \langle \kappa\vec{n}, -\vec{b} \rangle \Rightarrow \boxed{f=0}$

$X_{vv} = 0 \Rightarrow g = \langle X_{vv}, N \rangle \Rightarrow \boxed{g=0}$.

$\boxed{\text{(*) } K=0 + \text{παραβολικά} \Rightarrow \Rightarrow \text{αναπτυκτή !!}}$

$K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0$. Ισόπεδα σημεία υπάρχουν και είναι αυτά που όπου $\tau(s) = 0$.

$H = \dfrac{eG - \cancel{2fF}^{\,0} + \cancel{Eg}^{\,0}}{2(EG - F^2)} = \dfrac{-v\kappa\tau}{2(EG - F^2)}$

<u>Ερώτημα</u>: Είναι η X ελαχιστική;

$H = 0 \Leftrightarrow \tau = 0 \Leftrightarrow \boxed{c: \text{επίπεδη}}$

Άρα X ελαχ. $\Leftrightarrow$ c: επίπεδη

Αν c: επίπεδη επειδή η εφ/νη $\in$ επίπεδο της c $\Rightarrow$
$\Rightarrow X \in$ επίπεδο της c.

<u>Ασκ. ②</u>: Έστω $c(s)$, $s \in I$, $c(s) \in \mathbb{R}^3$ καμπύλη με φυσική παράμετρο, καμπυλότητα $\kappa(s) > 0$, $\forall s \in I$, και δεύτερο κάθετο $\vec{b}(s)$. Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια $X(s,v) = c(s) + v\vec{b}(s)$.
(i) Πότε είναι κανονική; (ii) Πότε είναι αναπτυκτή;

<u>Λύση</u>: (i) $X_s = \dot{c} + v\dot{\vec{b}} = \vec{t} - v\tau\vec{n}$, $X_v = \vec{b}$

$X_s \times X_v = (\vec{t} - v\tau\vec{n}) \times \vec{b} = \vec{t} \times \vec{b} - v\tau\vec{n} \times \vec{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{X_s \times X_v = -\vec{n} - v\tau\vec{t}} \neq 0$ διότι $\vec{n}, \vec{t}$ ΓΑ και $-1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{X: \text{κανονική}}$

(ii) Οι παραμετρικές καμπύλες καμπύλες $X(s = \text{σταθ}, v)$ είναι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $c(s)$ και είναι $\parallel \vec{b}(s)$ άρα X: ευθειογενής.

$\rightarrow N(s,v) = \dfrac{X_s \times X_v}{\|X_s \times X_v\|} = -\dfrac{\vec{n} + v\tau\vec{t}}{\sqrt{1 + v^2\tau^2}}$ ανεξάρτητο του $v \Leftrightarrow \tau(s) = 0\ \forall s$.

μοναδιαίο κάθετο

Άρα X: αναπτυκτή $\Leftrightarrow c(s)$ επίπεδη.

Ερώτημα: Είναι ανεξάρτητο του v;

Άσκ ③ : Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s και $\kappa(s)>0$, $\forall s\in I$. Θεωρούμε την καμπύλη $\bar{c}(s)=\vec{n}(s)$.

(i) Ν.δ.ο $\bar{c}$: σφαιρική, (ii) Ν.δ.ο $\bar{c}$ κύκλος (μέγιστος) αν-ν c είναι καμπύλη σταθεράς κλίσης.

Λύση: (i) $\|\bar{c}(s)\| = \|\vec{n}(s)\| = 1$ δηλ η απόσταση του $\bar{c}(s)$ από το $O(0,0,0)$ είναι σταθ $= 1 \Rightarrow \bar{c}$: σφαιρική

(ii) Αφού $\bar{c}$ περιέχεται στην S^2 είναι μαχ κύκλος $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \bar{\kappa}(s)=1$, $\forall s\in I$.

$$\frac{d\bar{c}}{ds} = \dot{\vec{n}}(s) = -\kappa(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s)$$

$$\left\|\frac{d\bar{c}}{ds}\right\| = \sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)} \Rightarrow$$ το s δεν είναι μήκος τόξου για την $\bar{c}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{\kappa} = \frac{\left\|\frac{d\bar{c}}{ds}\times\frac{d^2\bar{c}}{ds^2}\right\|}{\left\|\frac{d\bar{c}}{ds}\right\|^3}$$

$$\boxed{\frac{d\bar{c}}{ds} = -\kappa\vec{t}+\tau\vec{b}} \Rightarrow \frac{d^2\bar{c}}{ds^2} = -\dot{\kappa}\vec{t} - \kappa\dot{\vec{t}} + \dot{\tau}\vec{b} + \tau\dot{\vec{b}} =$$

$$= -\dot{\kappa}\vec{t} - \kappa^2\vec{n} + \dot{\tau}\vec{b} - \tau^2\vec{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\bar{c}}{ds^2} = \vec{t}(-\dot{\kappa}) + (-\kappa^2-\tau^2)\vec{n} + \dot{\tau}\vec{b}}$$

$$\frac{d\bar{c}}{ds}\times\frac{d^2\bar{c}}{ds^2} = \begin{vmatrix} \vec{t} & \vec{n} & \vec{b} \\ -\kappa & 0 & \tau \\ -\dot{\kappa} & -(\kappa^2+\tau^2) & \dot{\tau} \end{vmatrix} = \tau(\kappa^2+\tau^2)\vec{t} - (-\kappa\dot{\tau}+\dot{\kappa}\tau)\vec{n} + \kappa(\kappa^2+\tau^2)\vec{b}$$

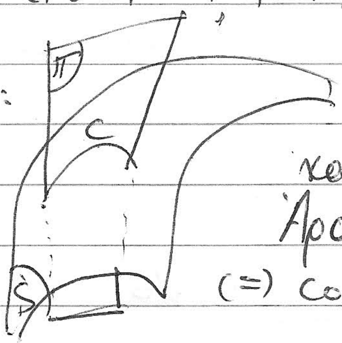
άρα $$\bar{\kappa} = \frac{\sqrt{\tau^2(\tau^2+\kappa^2)^2 + (\dot{\kappa}\tau-\kappa\dot{\tau})^2 + \kappa^2(\kappa^2+\tau^2)^2}}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}^{\,3}} = \frac{\sqrt{(\kappa^2+\tau^2)^3 + (\dot{\kappa}\tau-\dot{\tau}\kappa)^2}}{\sqrt{(\kappa^2+\tau^2)^3}}$$

Η $\bar{c}$ είναι μαχ κύκλος της $S^2 \Leftrightarrow \boxed{\bar{\kappa}=1} \Leftrightarrow$ $\longrightarrow$

$\Leftrightarrow (\dot{k}\tau - k\dot{\tau})^2 = 0 \Leftrightarrow \dot{k}\tau - k\dot{\tau} = 0 \Leftrightarrow k^2\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\cdot} = 0 \Leftrightarrow \frac{\tau}{k} = \text{σταθ} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{c}$: σταθ. κλίσης.

Άσκ (4): Επίπεδο (Π) τέμνει κανονική επιφάνεια S κατά μήκος κανονικής καμπύλης $c(s)$ με παράμετρο το μήκος τόξου. Αν η γωνία μεταξύ του (Π) και της S, $\theta \in (0,\pi)$ νδο η c είναι καμπύλη καμπυλότητας.



Λύση: Έστω N το μοναδιαίο κάθετο της S και w μοναδιαίο κάθετο δ/σμα του (Π). Άρα από υποθ. έχω ότι $\cos\theta = \frac{\langle N, w\rangle}{\|N\|\,\|w\|} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \langle \underset{N\circ c(s)\ \forall s\in I}{N}, w\rangle$ κατά μήκος της $c(s)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle (N\circ c)^{\cdot}(s), w\rangle = 0, \ \forall s\in I. \\ \langle \dot{c}(s), w\rangle = 0 \end{cases}$$

$w = \underbrace{w_T}_{\text{εφ/κή συνιστώσα}} + \underbrace{\langle w, N\circ c(s)\rangle N\circ c(s)}_{\text{κάθετη συνιστώσα}}$ κατά μήκος της c.

$\langle (N\circ c)^{\cdot}(s), w_T\rangle = 0$ | κι επειδή $\theta \in (0,\pi) \Rightarrow w_T \neq 0 \Rightarrow$

$\langle \dot{c}(s), w_T\rangle = 0$ | $\Rightarrow (N\circ c)^{\cdot}(s) = \lambda(s)\dot{c}(s)$

Όμως Θ. Rodrigues $\Rightarrow c$: καμπύλη καμπ/τας.

Άσκ (5): Καμπύλη $c(s) \in \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο s, καμπυλότητα $k(s) = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $s \in I$. Αν το κύριο κάθετό της είναι $\vec{n}(s) = \cos\frac{s}{\sqrt3} w_1 + \sin\frac{s}{\sqrt3} w_2$, $\{w_1, w_2\}$ ορθομοναδιαία διανύσματα να βρεθεί η $c(s)$ ως προς γεωμ. ισοτιμία.

Λύση: $\dot{\vec{n}}(s) = -\frac{1}{\sqrt3}\sin\frac{s}{\sqrt3} w_1 + \frac{1}{\sqrt3}\cos\frac{s}{\sqrt3} w_2$.

$\ddot{\vec{n}}(s) = -\frac{1}{3}\cos\frac{s}{\sqrt3} w_1 - \frac{1}{3}\sin\frac{s}{\sqrt3} w_2 = -\frac{1}{3}\left(\cos\frac{s}{\sqrt3} w_1 + \sin\frac{s}{\sqrt3} w_2\right)$

δηλ $\boxed{\ddot{\vec{n}}(s) = -\frac{1}{3}\vec{n}(s)}$ (1), $\dot{\vec{n}} = -k\vec{t} + \tau b$

$\longrightarrow$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{n}} = -\ddot{k}\vec{t} - \dot{k}\dot{\vec{t}} + \dot{\tau}\vec{b} + \tau\dot{\vec{b}} = -\ddot{k}\vec{t} - k^2\vec{n} + \dot{\tau}\vec{b} - \tau^2\vec{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{n}} = -\ddot{k}\vec{t} - (k^2+\tau^2)\vec{n} + \dot{\tau}\vec{b}} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-\ddot{k} = 0} \\ k^2+\tau^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \tau = \pm\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} \\ \dot{\tau} = 0 \end{cases}$$ κυλινδρική έλικα από Θεμ. Θεώρ.

Ασκ 6: Δίνονται οι καμπύλες $c_1(t) = (f(t), t)$ και $c_2(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}f(t) + \frac{1}{2}t, \frac{1}{2}f(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}t\right), t \in \mathbb{R}$.

Ελέγξτε αν είναι γεωμετρικώς ισοδύναμες.

Λύση: Μήκος τόξου της c_1: $S_1 = \int_0^t \|c_1'\| d\sigma$

$$c_2: S_2 = \int_0^t \|c_2'\| d\sigma$$

$$c_1'(t) = (f', 1) \Rightarrow \|c_1'(t)\| = \sqrt{(f'(t))^2+1}$$

$$c_2'(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}f'(t) + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}f'(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \|c_2'\| = \sqrt{(f')^2+1}$$

$$\Rightarrow \|c_1'\| = \|c_2'\| \Rightarrow S_1 = S_2.$$

$$K_1 = \frac{f'(t)t'' - f''(t)t'}{\sqrt{((f')^2+1)^3}} = \frac{-f''}{\sqrt{\ }}, \quad K_2 = \frac{\dots}{\sqrt{\ }}$$

Αν $K_2 = -K_1 \Rightarrow$ η ισομετρία είναι κατοπτρισμός.